第六届“ＰＳＩ－新语丝”网络科普征文投稿

怎样学数学

丁玖

从幼儿园小班到高中毕业，我国的青少年与数学打了大约15年的交道，进了大学的理工科，还要与高等数学打几年交道；如果将来的志向是当数学教授，则要打一辈子交道了。多年来由于奥数的大举入侵，数学似乎更成了成年前学生最花心血的一门学科。照理说，校园内外有这么浓厚的数学氛围，我们的学生应该是数学的宠儿了，但是我经常听说大学理工科的许多学生十分怨恨数学，也没有真正学好数学，包括数学系的那些理想成为职业数学家的新生。

这是什么原因呢？我想一个原因是他们中的一部分人，学到大学阶段还不知道怎样学数学。我最近完成了一本书稿《南大数学七七级》，专讲我的同班学友的高考故事、大学经历，以及水到渠成的“远大前程”。在总共15章中，有一章专为我们的大中学生而写，标题为《怎样学习》，目的就是“传授”通过我班同学实践过并证明行之有效的一些学习方法，把我们青少年每天面临的“学习问题”拿出来研究一番，提供建议。

我在中国读到南京大学的硕士学位，后来留学美国密歇根州立大学获得博士学位。一眨眼，我已在美国一所大学的数学系任教快29年了。我上学较早，14周岁高中毕业，在三个工厂当过五年的工人。我能荣幸成为七七级高考均分与天文系并列全校第一的南大数学系新生中的一员，这得益于我进厂学徒前，在三个月内从头到尾精读完“文革”前高中三年的18本数理化课本。可以说，我很早就经历自学而无师自通的实践，学会怎样读书，懂得掌握概念是学通数学的不二法门。进大学后，在全班强手如林并且人人苦读的氛围中，我循序渐进、稳打稳扎，配合数学与人文课内课外书籍的大量阅读，本科毕业时真正爱上了数学，走上了职业数学工作者的康庄大道。对怎样读好数学，我有点心得体会，甚至也有过思考。这篇文章的主要材料来源于上述的书稿，记录了我对如何学好高等数学的一些想法。

记得在我们读南京大学的大三第二学期时，刚进校不久的八〇级学弟学妹们久闻七七级学长的读书劲头和求知本领，专门安排了一个日子请了我班的几个学习尖子为他们传经送宝，专讲怎样学习。

其实任何读书种子的学习方法都不是人人可以机械效仿的金科玉律。比如说我的大学同班同学田刚本科阶段做了两万道习题这种高强度的训练，会让今天的大学生视为楷模而如法炮制吗? 又比如说我另一个同学何炳生大学时的课堂笔记一滴不漏、做的习题一丝不苟，就一定是成为研究型数学家的必备资质? 如同婚姻配偶的幸福源泉所在，最适合自己的学习方法就是最好的方法。但是“盲目崇拜名人”总是我们这个文明古国久治不愈的一大病症，在人文社会科学里最为显眼。于是我们的百姓时常缺乏自信心，非要请那些社会贤人、公知分子为他们指点迷津不可，比如恳请这些成功人士开具一列从一到十的必读书目。这让鲁迅先生最感到讨厌了。就像不同的人有不同的指纹，不同的人有不同的学习方法。就拿四十年前我班同学来说吧，有的人读书精通概念，力求弄清思想；有的人读书猛做习题，设法熟能生巧；有的人读书专攻记忆，考试放在第一；有的人读书突围课本，游弋参考文献；有的人读书大处着手，细节忽略不计；有的人读书精雕细琢，不放蛛丝马迹。如此种种，各有各的优势和弱项。比方说，透彻理解概念和思想的学生，将来成为创造型研究家的几率较大。但如果他们平时练习不够，或不喜爱机械记忆，很有可能其成绩单不够漂亮，不能唬人。成绩单在学校，尤其是中国的学校，可是个衡量学业质量的最重要的凭证呀。

我的师爷约克(James Yorke)教授就是藐视“成绩决定论”的一个人物。2015年的7月初，在庆祝我的博士导师、他的博士弟子李天岩教授70寿辰的学术研讨会上，我和他曾经就教育问题有过一次畅谈。谈话的内容后来被我写进一篇文章《约克教授谈教育》，登载于那一年最后一期的《数学文化》上。约克教授给我看过他高中时期的成绩单，上面四年的数学成绩全在90分以下。但是他自豪地告诉我：“我从高中就学会了怎样学数学。”这就能解释中学数学没有A的他，居然在全州的高中数学竞赛上获得第三名。到了大学，约克的成绩自称“没有B”，他来自台湾的博士生李天岩，自然中国式地推理下去：“全是A。”但是导师却笑眯眯地回答道：“C或者C以下。”那这个成绩单拿不出手的美国小子，后来怎样成为世界闻名的混沌学大师的呢？我在下面将再回头来阐述他关于“怎样学习”的有启发性的思想。

学习真的是和下棋一样存有妙着吗? 象棋大王胡荣华的一着妙棋可以马上置对方于死地，而迫使对手俯首称臣。如果读书学习也有这样的魔戒套指，这样的魔戒如果真能从《指环王》的银幕跳下来戴上数学家爸爸的右食指，他首先会迫不及待地将魔法施展于他的儿子或女儿身上。可是我们既没有听说过欧拉的子女中有一位数学家，也没有耳闻过陈省身的子女与数学为伍(当然他的女儿嫁给了一位卓越的低温超导物理学家朱经武)，却知道丘成桐的两个儿子都与生命科学结下了不解之缘，且学业精湛。所以，断言“数学家的儿子也是数学家”之不成立，无可辩驳地证明了这个事实：绝对真理性的行之有效的学习方法是不存在的。这是多么令人沮丧的事实啊! 然而它却和永动机或长生不老丹之不存在，都是一样的铁的事实。

但是，没有放之四海而皆准的“学习方法”，并不意味着不存在可以用来回答“怎样学习”这一难题相对而言行之有效的一些行动准则。我在工厂的年代，读过一本北京大学中文系编写的教材《写作基础知识》，被其中引用的朱自清、曹禺等写作高手描写春天的佳句所吸引，差点立志要成为文学家。古人语：“熟读唐诗三百首，不会吟诗也会凑。”对于人文学科，多读就会能写。但是这一法则并不一定是学好理科尤其是数学的一条捷径。虽然对于学好数学而言，多读书多做习题不是坏事，也是常被强调的基本手段。但问题是怎样多读书，怎样多做习题。是囫囵吞枣地多读书，不求甚解，或是机械性地多做题，不加思索？许多人尤其是青年学生经常茫然于“学习的方法论”，困惑于“不得要领”的读书实践，或痛苦于“事倍功半”的时间流逝。然而精通任何一门学科，都有几个基本原则可循，都有某些经验体会可谈。现在，我们着重探索一下“怎样学习”这一大中学校年轻学子很感兴趣的论题。我将采用我的同学故事为我表达的观点提供客观例证。实际上，下面的经验之谈或基本观点大都来自于我班同学的亲身体会，也深得我的共鸣。所以有些标号为“我的”观点，实际上也是“我们的”观点。

我的大学同学翟灿芳小学六年级时就拿过全县的算术比赛第一名。1963年考入初中后，他的数学在学校遥遥领先。尤其是学到平面几何的那个学期，很多同学找不到北，他却是如鱼得水。到后来他的老师解不出来的数学题也来问他，他都能一一解出来。于是同学们叫他“小华罗庚”。风头正盛的翟灿芳被校长请到了全校大会上讲讲他是如何学好数学的。无论他怎么绞尽脑汁地想，他也不知道是怎样学好数学的。最后他只好胡乱地编出类似于“愚公移山”的励志故事。这和社会和舆论都一致推崇的“笨鸟先飞”的说法，基调完全是步伐一致的。

几十年后，当翟灿芳和我聊起这段往事时，他用了“胡说”二字，对他在初中大会上传授愚公移山的学习法宝这个历史事件定了性。然后他下了这样的结论：“其实兴趣和天资是最重要的。”

翟灿芳已经替我们给出了回答“怎样学习”这个问话的先决条件：首先是兴趣大于一切，其次天资也是导致成功的关键因素。兴趣决定爱好，而按照郭沫若先生的观点，“爱好出勤奋，勤奋出天才”。前五个字我想人人都会同意的。原因很简单，缺乏爱好就会产生惰性，哪能产生勤奋之力? 但是后五个字不一定个个都赞同。比如他年轻时的好朋友胡适可能就不相信“勤奋”是天才涌现的充分条件。在这一点上我和翟灿芳都是站在胡适这一方的。但是我认为反过来却是对的，即勤奋是出现天才的必要条件。胡适博士的天才观在他给吴健雄的短信里说得清清楚楚：

凡治学问，功力之外，还需要天才。龟兔之喻，是勉励中人以下之语，也是警惕天才之语，有兔子的天才，加上乌龟的功力，定可无敌于一世，仅有功力，可无大过，而未必有大成功。

或许郭沫若与胡适实际上是“英雄所见略同”的，只不过在那个宣扬“奴隶创造历史”的特殊时代，他不敢明确地表达自己的观点罢了。

当年我在国内当学生的时候，读到的名人采访记或回忆文章，总把自己事业上的巨大成功说成是勤学苦练的结果。这固然说得不错，没有这个必要条件，成功只是黄粱美梦。但是这些功成名就者有意或无意地隐瞒或忽略了最关键的必要条件，这就是他们在其专业赖以成功与身俱来的天赋之才。更有甚者，部分大师反而谦称自己天生就笨，成功秘诀仅是“勤能补拙”。一个例子就是华罗庚。他的诗句是：“勤能补拙是良训，一分辛苦一分才。”然而在西方人看来，这种深具中国传统美德的自谦之语，或许是违反科学事实的“一派胡言”。我们谁会相信华罗庚不是天才? 华先生作诗的良苦用心，就是想通过自身的勤奋来带动一代中国人的勤奋。西方人对于成功之解释，可从不讳言来自上天的天才这一关键的因素。比如说，今年5月11日是其101周岁冥诞日的美国理论物理学家费恩曼(Richard Feynman)，是人人都认为、他自己也无需谦虚的天才人物，是波兰裔美国数学家卡茨(Mark Kac)眼里“能力最强的魔术师”。其他芸芸众生，再努力、再刻苦、再勤奋，借用一下已成名言的吴宓仰慕陈寅恪的那句话的最后四个字，“不过尔尔”。费恩曼的一本传记作者、美国《纽约时报》的科学记者格莱克(James Gleick) ，干脆将书名起为言简意赅的一个单词Genius(天才) 。

在几十年前那个特殊的时代，人们信奉的是鼓舞大众的一句励志成语“笨鸟先飞”。这个常被使用的鼓劲之话确实具有鼓励上进的积极功能，但不可否认的是一个简单的事实：会飞的普通白鹅无论怎样鼓气上飞，却永远不能像白天鹅那样地翱翔天穹。因此，昨日的这四字豪言和今日的一句更加响彻云霄的口号“不让孩子输在起跑线上”，某种意义上讲，在读书学习上都是误导民众的“罪魁祸首”。正确的姿态应该是这样的：不管自己是否“生而知之”或是“天生愚钝”，充分认识你自己，扬长避短，培养对待你真正喜欢的一门学科的兴趣，寻找到适合自己的学习方法，勤奋地读书学习，最大限度地飞翔到与你的才华和能力相匹配的一个高度。

 在谈论“怎样学习”这个话题时，我们不应忘记一个前提条件，就是学习的动力来自于对所学科目的热爱。而这种出自兴趣的热爱又往往被自己的天赋之才所点燃。杨振宁先生与生俱来的天赋在于理论探讨，而动手实验却是他的弱项。所以他刚到芝加哥大学物理系读博士学位时，做实验屡屡受挫。从而实验室里流传的一句笑话“哪里有爆炸，哪里就有杨振宁”，现在成了“人才学”里常被引用的经典语录。所以将杨振宁培养成像丁肇中那样的实验物理学家只会是天方夜谭式的美梦，但是他强大的数理分析能力和超越常人的科学想象力成就了他作为当代伟大的理论物理学家的一生。在如何学习这方面，我们也要听听苏格拉底“认识你自己”的忠告。关于这点，我的大学同学蒋珉做了很好的榜样。进了南大后，他发现自己对物理中的力学、电学和光学等部分内容似乎更感兴趣。一位外系的老三届朋友也认为他更适合于搞应用数学。于是蒋珉请教了一些数学教授。他们告知了他一些这方面的学习方法。自此，他一方面认真学习本专业的课程，得到理论数学方面的系统训练；另一方面，他旁听了很多外系的课程（物理、化学、生物、气象、经济等），打下了未来从事应用学科研究的广博基础。

好了，如同在数学上常做的那样，我们先给出一组假设。在此假设下，我们来探讨怎样学习，特别是怎样学好数学。这里所指的数学并非仅指数学系学生要修的那些数学。它包括的是大学课程里开设的任何“高等的数学”。我们的假设是：学生已经建立起对所学科目的感情，即学习的兴趣已经不成问题，并且该学生愿意勤奋地学习。他或她是否天赋极高或智力平平，我们在这里并不在意。在这理想的状态下，我们想知道的是怎样事半功倍地学好这门学科，而无需来自家长、政治辅导员、心理学家或校方专司学生工作的有关部门等等的非数学因素的配合。

我首先想强调的是：学习的第一要素为专注。很难想象一个注意力高度不集中的学生会念好书。有的人天生就有在热闹场所也能静心读书的本领，但另外一些人即便在静谧无声的环境中也难以埋首书本。他们可能像身体中铅元素含量超标的儿童，患有多动症，刚看了几秒书，眼睛就开始东张西望，给人以坐立不安的印象。如果周围确有如花似玉的美丽姑娘，眼光离开书本而偷偷地看她几眼，情有可原，但有人习惯的是即便旁边坐了一位不想瞧见的丑大妈，他还是静不下心来只看自己的书。这样的人，如果改不了动来动去的读书姿势，最好不要进入数学系，免得遭受极限语言的痛苦折磨。须知，深奥的极限理论非凝眸定力一字一句地琢磨，不能深刻领会其精神实质，顶多是云雾中的一知半解，似懂非懂。我想指出的是，专注者看书一小时的效果，抵得上精神涣散者五个小时的智力劳动。如果真的想学好数学，注意力较差的人必须下定决心排除万难，先学会专注的这门童子功。

那怎样才能掌握这门功夫呢? 京剧大师梅兰芳先生出名前，曾苦练眼功。他小时候两眼稍有近视，导致眼神不能外露，偶尔迎风还会流泪，眼珠转动也不灵活。这对于一个演员来说是个致命伤。拜师时老师讨厌他的一双“死鱼眼睛”而不肯教他。这就像学数学者先患了多动症一样。但是眼神先天不足的[梅兰芳](https://www.baidu.com/s?wd=%E6%A2%85%E5%85%B0%E8%8A%B3&tn=44039180_cpr&fenlei=mv6quAkxTZn0IZRqIHckPjm4nH00T1Y4uyFWnWD3PW9hmyPbnywW0ZwV5Hcvrjm3rH6sPfKWUMw85HfYnjn4nH6sgvPsT6KdThsqpZwYTjCEQLGCpyw9Uz4Bmy-bIi4WUvYETgN-TLwGUv3EnHbsPWT4nWTv)不灰心，通过驯养鸽子练眼功。他的眼光始终盯住蓝天中翱翔的鸽群，眼珠也随着空中盘旋的鸽子左右转动。久而久之，春夏秋冬，他练就了后来在舞台上一个个女性角色顾盼有神、熠熠生辉的双眼。

举一反三，从这里我们可以开出医治“专注缺乏症”的一剂良方：到人多嘈杂的场所读书去。如果你不喜欢走出户外训练自己，也可以打开电视机，选择一个特别有趣的节目，并且使它有声，然后坐在电视机的前面看书，努力不让自己抬起头来看电视。刚开始时，你大概被身边晃动的人群和高分贝的“混合唱”，或者电视里动人心弦的表演搅得心烦意乱，进不了书的世界。但是，只要你强迫自己目光如炬地注视眼前的铅字，无视他人它物，达到天塌下来也无所畏惧的境界，你的注意力就会稳步上升。过不了几次，你的专注能力就会冲上90分的高度。到了那时，你看书时就可能像我的大学同学王雪平那样一动也不动了；他是我班同学中最早担任海外大学正教授的。如果这样，我祝贺你已经具有了学好数学的一个必备条件。然而，这还不是一个充分条件。所以你需要继续读下去。

我在长期的读书经历中，体会出学好数学的最重要的法宝，这就是对概念的精通。其实这也是我班同学数学学得透彻的一部分人的共性。数学以公理和公设为前提，以定义为先导，以逻辑为工具，逐步推演出紧紧围绕在被定义概念周围的各种命题。在这个过程中，推理的艺术笼罩一切。而我们看懂定理证明的一切本领，来源自中学所学的欧几里得几何。所以，1977年江苏省高考统考的数学满分者、我的大学同学魏木生认为，平面几何是中学数学课程中最重要的。

 数学命题的内容不外乎是关于某个概念的性质，或与其它概念的关系。命题表述中的所有概念都必须已被定义。故在它们的证明中，所涉及的概念无处不在。因此一碰到某个概念，就应该在脑海里浮现出关于它的清晰图像。比如说，在微分学里有个简单的命题：若函数在一个点的导数存在，则函数在该点是连续的。它的几何直观性是显然的：若函数的图像在一点有切线，则函数的图像在这一点无间断。在这个命题当中，有三个数学概念，其中“函数”是中学里就学过的老概念。其它两个概念，即“连续”和“导数”，则是在微分学中先后被引进的。所以在证明这个命题时，一定要对这两个概念的定义了然于胸。如果连导数的定义还停留在模模糊糊的状态，或者根本还没有搞懂“连续”究竟意味着什么，怎么能从一个函数的可导性推演出它的连续性呢？

既然概念这么重要，为什么许多学生并不把它放在眼里呢？原因之一或许是，对于他们而言，背诵定义比理解定义更容易、更轻松。背诵定义是机械性的行为，而理解概念则需要思考的投入了。好的教科书中的数学定义，写得非常清楚，也很节约，即没有任何废话，每个字都有用。要完全理解复杂定义的内涵，并非易事。它需要不停的苦思冥想，绞尽脑汁。检验自己是否真正搞懂了一个定义，一个妙法就是命令自己写出该定义不满足时的一句陈述。如果写不出来，大概离真懂定义尚有一段距离。

兹举一例。假设读者学过“ε - δ”语言的极限定义。让我们先回忆一下这个定义：我们说函数f当x趋向于a时的极限为L，如果任给正数ε，存在正数δ，使得当位于f的定义域内的x满足不等式0 < |x - a| < δ时，不等式|f(x) - L| < ε就成立。那么，“函数在a点的极限不是L”这一现象该怎么陈述呢？这是关于一个性质不成立的说法。当这个性质比较简单的时候，否定的说法同样简单。比如说，“我是一个学生”的否定叙述就是“我不是一个学生”。然而，对于一个包含了“任给”、“存在”、“当......就”等单词和短语的复杂定义，它的否定语句就不是那么好对付的。这需要开动我们头脑里所有的逻辑机器，挥舞分析的大刀，才能办得到。读到这里的读者，就请你写出“函数在a点的极限不是L”的定义吧。

只求记忆、不肯思考是许多人学数学时的一大障碍。一些同学早已将上述的极限定义背得滚瓜烂熟，但还是俘获不了对方的芳心，一做起稍有挑战性的极限题就坠入迷雾之中。尤其在需要证明极限不存在的场合，就更加不知所措了。固然，有人是愿意思考的，但可能由于某些不易控制的内在或外来的因素，对于复杂的定义或者艰深的证明，一下子难以理解。这时，耐心就起了关键的作用。这里我们不妨借用一下费恩曼在他23岁时给他14岁的妹妹的读书指导：“你从头读，尽量往下读直到你一窍不通时，再从头开始。这样坚持往下读，直到你全能读懂为止。”这个方法是行之有效的，最适于希望无师自通的自学者们采用。我相信，我大学同学中分析数学学得比较扎实的那些人，肯定与费恩曼“英雄所见略同”：读书时碰到不懂之处时，马上从头再来，逐步推进，最终全盘拿下整章整节。

既然数学可以说是一门“证明的科学”，从某种意义上说，学会了证明或者至少看懂了证明，就等价于学好了数学。数学中的命题常有其它名字，大部分重要的命题被称为“定理”。一小部分以“引理”冠名，还有的叫“推论”或“系”。前者的功能是为了证明其它定理，后者就是前面一个定理的某个直接结果。懂不了命题的证明，对于数学生而言几乎就是“耻辱”。所以约克教授曾经强调说：“理解重要定理证明的每一步比理解定理本身还重要。”但是如何看懂定理的证明呢？

在我2015年发表在普及杂志《数学文化》上的那篇《约克教授谈教育》的文章中，我记载了约克教授对于怎样看懂定理证明的指导性建议。约克教授强调说：

学生（甚至教授）要试图理解证明中的关键思想，并最好找到两个关键的想法。这些关键思路不一定非得以‘引理’的面貌出现，因为书中也许指出了太多似是而非的关键线索。其实关键思想往往是令学生大吃一惊的那个，因而不同人会挑出一个证明中的不同关键想法。它们是提高我们理解力的关键要素。一个关键的点子也许会有复杂的证明，故学生们应当从这个过程中发现两个关键的思想。

接着约克教授用两个数学例子阐述了他的思想。第一个是初等微积分里的“介值定理” ，它的几何意义连小学生都能看懂：连接一条直线两旁各一点的一条不间断的曲线一定要穿过这根直线。该定理的正式数学陈述是：如果*f*是一个定义在区间上的取实数值的连续函数，则对位于函数值 和 之间的任何一个数*d*，存在  中的一点*c*，使得。证明它的第一个思想是，通过区间的中点将区间一分为二，得到两个子区间，长度都是原区间的一半。数*d*一定位于函数在两个子区间之一的两个端点上的值之间。由此性质确定的那个子区间将取代原先的区间。第二个思想是，重复运用上面那个平分区间的思想，并且保持数*d*总是位于区间两端点的函数值之间这一性质，就可以得到每次长度缩小一半、前面套住后面的一个无穷的闭区间序列。这些区间最终将趋向于一个点*c*。根据假设*f*是一个连续函数，因而该点*c*必定满足等式。上述两个思想就是证明介值定理所需要的关键步骤。

约克教授告诉我的第二个例子则较为高深。它是拓扑学里著名的“吉洪诺夫定理”：任意个数的紧集的笛卡尔乘积也是紧集。这里没有必要解释其中的几个数学术语以及该定理的困难重重的证明，但是只要抓住了两个关键的想法，证明也就水到渠成了。有拓扑学基础并对此感兴趣的读者可以打开我的书《亲历美国教育：三十年的体验与思考》。它的附录就是《约克教授谈教育》。顺便讲一个与此有关的真实故事。约克教授所在的马里兰大学数学系曾有一次博士资格考试的口试。教授请被口试的博士生证明吉洪诺夫定理的一个简化版本：两个紧集的乘积是紧集。但是该学生央求教授让她证明更一般的断言“任意个紧集的乘积是紧集”，因为准备充分的她已将这个一般性结论的证明背得滚瓜烂熟。

我在读博士的那几年，导师李天岩教授的博士生一直坚持每周一次的讨论班。他对我们讨论班上报告别人论文的基本要求是“我不要听你们一般性的证明，请给我证明特殊的情形。”一般结论背后的思想往往在特殊情形中表现得更为生动。而任何抽象数学定理的原始想法经常来自于某个具体的数学对象，然后进一步的思考就能激起对有用性质的抽象化过程，最终导致“一个定理的诞生”。这最后七个字是菲尔兹奖获得者维拉尼的一本数学畅销书的书名。我记得很清楚，我们几个师兄弟为了免被像华罗庚那样的严师挂黑板，报告的准备工作都不敢马虎。那种阅读定理证明直奔思想腹地的探索行为，让我们终生受益。

 我不可能对别人学习方法的细节了如指掌，但是对于自己过去的读书生涯还是记忆犹新的。在大学时代，我的许多时间是用于看课外书籍的，包括人文与数学。自然，数学书读的时间更长一点。平时，我看教科书的时间并不太多。但是每次听课之前我会大致预览一下课本上的内容，上课后只顾竖起耳朵认真听讲，不做笔记，顶多在教科书的边境地带记上老师嘴里吐出的而书上没有的个别干货。课堂上注意力集中专心听课后，我感觉到概念已经融化在我的脑海中，何必再记在纸上。后来我读到贝尔的科普杰作《数学大师：从芝诺到庞加莱》，方知大数学家庞加莱读巴黎高工时，由于天生视力不佳看不清黑板上的字，而干脆坐在教室的后排用耳朵听课，也不做笔记。于是我就洋洋得意起来：他和我一样不作课堂笔记。不过不做笔记的主要原因还是因为老师讲的书上都有，也就不多此一举了。教课书中的铅字印刷得个个清楚，肯定比任何钢笔字写得再好的人的笔迹，读起来更胜一筹，也就更无笔记之必要了。当然后来留学美国，我开始“改邪归正”，记起了课堂笔记。原因是美国教授要么不按教材讲，要么根本没有教材，全凭他的三寸不烂之舌兜售知识，他的课堂表演不记录下来就会大大吃亏。所以我直到现在，大学的课堂笔记全不存在，而博士阶段的课堂笔记一本本地放在那里。

由于我的理解力不算太差，加上我读书时颇为专注，比较容易进入角色，故我学习的效率不很低，因而我有余力大量阅读参考书或与课程无关的课外书籍。我的读书方法实际上遵循的就是费恩曼的读书法，尽管那时我还不知他是何许人也。一旦我读到某处被卡住了，就知道我对之前书中引入的新概念还有问题，于是我就回到前面该读的地方再读一遍。这种反复阅读的来回作战，我不但不感到枯燥无味，反而越读越兴趣盎然。盖因每读一次都有新的理解、新的收获。我在大学阶段读过的那些参考书或课外书，如匈牙利人黎茨(Frigyes Riesz)与塞可佛尔维-纳吉(Béla Szökefalvi-Nagy)的名著《泛函分析讲义》(Functional Analysis)，都是这样慢慢往下啃的。到了研究生阶段，自由支配的时间更多，我也乐意广泛阅读专业基础书和研究参考书。在南大的硕士研究生期间，我们几个同窗学友读了很有深度的《凸分析》(Convex Analysis)。

学习数学的一个重要步骤是做习题，然而绝不是做得越多越好。田刚读本科时虽然做了近两万道习题，但是他现在被采访时也不鼓励学数学的大学生像他过去那样。其实中国目前数学题做得最多的反而是中小学生，惟一目的就是为了高考。学简单的初等数学花了那么大的劲，就好像杀鸡用了牛刀；花费了那么多的时间，就好比坐船去美国，都是浪费精力时间之举。中国的高中生大概做了几十倍于美国高中生所做的数学题，但无法否认的事实是最后成为杰出数学家的个数美国人大大多于中国人。原因何在？就在于中国学生的做题是为了增加高考数学题目的命中率，而美国学生的做题是为了巩固概念并帮助“推陈出新”。

那么，怎样做题才算“科学地做题”？学好数学最根本的要旨是掌握概念，所以概念不清的时候就不要急于忙着做题。事实上，完成任务式的做题是难以“做好题”的。我班那些善于做题者，下课后都是不慌不忙地先把定义、定理搞得一清二楚，然后才开始做题，这又加深了概念理解。好的教科书列出的习题，除了一部分是围绕概念或应用定理的“常规题目”，还有一批是锦上添花极具挑战性的上等题目。有的书干脆将带有提高性的某些重要命题放在这里向读者叫板，请予证明。要敢于尝试这类题目，而不要做太多的几乎不要动脑子的“概念题”。这才是提高数学品味的最佳途径。苏联人吉米多维奇经典的《数学分析习题集》的5000道题目中大概有四分之一左右的难题。我的大学同窗王宏玉、田刚、何炳生、魏木生等人则是通过攻下这些难题而逐步练就分析数学的真功夫。

“学生怕考试”似乎是雷打不动的事实。的确是。我在美国教书的班上，有些学生一到考试前，总是千方百计地打听考试的范围，巴不得我把考试题事先告诉他们。按照习惯做法，考试前的一节课是复习要考试的章节，这一天来上课的学生最多，许多人极想获得考试内容的一鳞半爪。虽然我会提纲挈领地总结考试覆盖的所学内容，但总会想起我当年念大学时的镜头。镜头之一是教我们《数学分析》的倪进老师每当期中、期末考试前常会说的一句话：“我真的不知道怎样为你们复习，我不可能从头到尾重讲一遍，你们自己复习吧。”于是我们同学就不可能像我目前的美国学生那样可以有机会在课堂上“刺探军情” ，只好自己复习迎考。

怎样复习? 那就如“八仙过海各显神通”。有的人把做过的习题再过一遍，忘掉的证明或解法这时可以还原于脑。此种复习法最适用像何炳生这样作业做得认认真真、字写得清清楚楚的学生了。而对我这类做作业不见得马马虎虎却并非写得一板一眼的另一部分人，大概连再看一遍的勇气都会丧失。于是我就干脆看教科书。如前所述，除了课前的预习，我常把教科书丢在一边。但我不能像古代的皇帝那样把她打入冷宫一辈子不管。这时应该是和她恢复友情甚至爱情的最佳时刻了。在那考试前的一周内，我正襟危坐，手捧教材，一个字一个字地从头到尾把它读完。对我来说，这也许是我的最好的复习方式：重温了定义，巩固了概念，厘清了疑难，完成了任务。复习后，我感到一身轻松，因为明显觉得自己概念清晰、头脑清楚，自然基本的公式我顺便也记得牢牢靠靠了。然而我知道，总有比我考得更好的，总有比我交卷更早的。这不奇怪，一分耕耘一分收获。对于考试而言，只要智商不低，只要多花功夫，只要复习得当，考个满意的分数对哪个人都不会是个问题。我清楚自己还是没有流出足够的汗水，甚至有点讨厌复习，以为它颇为浪费时间。我在一则日记中也记载了期末考试前一日为了消遣大看小说的故事。

考试成绩当然是重要的，因为它是评估学生究竟学得怎么样的唯一途径。上好的成绩单作为记录在案的学术历史，能让自己一辈子感到荣耀。可是如同大学排名榜，按照数学家出身的芝加哥大学的校长Zimmer博士的说法，只要在排名基于的那些具体指标上多下功夫，学校的排名就会上升。中国的新东方学校能教出许多托福满分的学生，但他们真正的英文阅读能力可能还不及美国的一名小学生，就是因为他们是为托福的高分而受训的，并非为了整体地精通英文。因此美国的名牌大学对排名基本上不太在意，它只跟随自己的教育理念和既定方针，强化学校的教学与科研。同样的道理，如果一个读书的学生把考试成绩看得太重而轻视博览群书的自我成长，基于考试成绩的第一第二只能会是时间上的局部函数。一个有远大理想的学子，考虑的应是十年后的冒尖或二十年后的辉煌。我有点庆幸自己在大学时代没能坚持都向成绩好的同学看齐，而是跟着自己的感觉走。失之东隅收之桑榆，这个成语就解释了我的一次经历。在报考硕士研究生前，不少同学不修第二外语了，我还是坚持修完了第二外语德语，这当然会减少为了迎考复习英文的时间。读了研究生后，我通过了免修德语的考试，又修了俄语。到了美国以后，偏偏密歇根州立大学的数学系有个拿博士学位的必要条件：通过两门外语，在德语、法语、西班牙语和俄语中选，中文自然落选。幸亏我在南大修过德语和俄语，关键时刻它们派上了用场。我很快就通过了这两门考试，避免了再去修课及格通过的小麻烦，并且拿到了最高一等的助教奖学金。因为通过了博士学位所要求的全部考试，就差一篇博士论文交差了。

总而言之，学习与婚姻一样，都是终身大事。在青少年阶段养成好读书的习惯和读好书的品味，在课堂求学的数年，学会怎样学习，寻求到适合自己的读书法，就能化被动为主动，唤起书中铅字的活力，把它们读得翩翩起舞。你的思维也就活动起来，你的阅读快感也会不断升腾，你的人生经历也越来越滋润有味了。

 定稿稿于2019年10月

 美国哈蒂斯堡